РОЗДІЛ 1

ВПЛИВ РІДИННИХ МІСТКІВ НА ВЗАЄМОДІЮ ТІЛА ТА ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ ЗА НАЯВНОСТІ ВИЇМКИ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ

Р.М. Мартиняк, О.П. Козачок, Б.С. Слободян

1.1. Вступ

Серед чинників, які визначально впливають на контактну передачу зусиль, навантажень і енергії між об'єктами в природі й техніці, слід виокремити геометрію поверхонь тіл та середовище в області їх контакту. Природна субстанція (газ, рідина), в якій перебувають спряжені тіла, речовина функціонального призначення (мастило, охолоджувальна рідина), біологічна рідина (синовіальна рідина в суглобах) – типові приклади такого середовища, що відіграє важливу роль у процесах контактної взаємодії та функціонуванні структур. Середовище створює додатковий тиск на поверхні тіл, приймає на себе частину прикладеного до них навантаження і може суттєво впливати на фактичну площу контакту, контактні напруження і міцність тіл. Тому контактні задачі теорії пружності за наявності середовища в області спряження тіл сформульовано в окремий розділ контактної механіки, який має важливі прикладні застосування в техніці та природознавстві.

Найновіші дослідження в цьому напрямі стосуються моделювання взаємодії деформівних тіл за наявності в міжконтактному просвіті (зазорі) рідинних міжповерхневих містків з урахуванням поверхневого натягу рідини. Прикладний інтерес до них зумовлений потребою кількісно оцінити вплив капілярних явищ на функціонування жорстких дисків комп'ютерів, мікро- та нановимірювальної техніки, біологічних структур, механічну поведінку гранульних матеріалів, коли волога, конденсуючись на межах тіл, під дією поверхневого натягу переміщається у певні місця міжконтактних зазорів.

Розташування рідини залежить від того, чи вона змочує, чи не змочує поверхні тіл. Під дією поверхневого натягу σ рідина, яка повністю змочує поверхні тіл, збиратиметься у тих місцях зазорів, де їх висота найменша. Якщо ж рідина повністю не змочує поверхні тіл, то локалізується у тій частині зазорів, де їх висота найбільша. Інша частина міжконтактних просвітів заповнена газом (повітрям, парою). На меніску (на бічній поверхні рідини, що межує з газом) діє поверхневий натяг σ. Якщо рідина змочує поверхні тіл, то її тиск менший, ніж тиск газу; якщо ж не змочує – то, навпаки, тиск рідини перевищує тиск газу. Внаслідок поверхневого натягу тиски у рідині P_2 і газі P_1 відрізняються і їх перепад $\Delta P = P_1 - P_2$ визначає формула Лапласа [1] $\Delta P = \pm\sigma\left(1/R_1 + 1/R_2\right)$, де R_1, R_2 – головні радіуси кривини двох взаємно

перпендикулярних нормальних перерізів поверхні меніска, знаки "–" та "+" відповідають рідині, яка змочує та не змочує поверхні тіл. За зменшення розмірів ділянок контакту та збільшення кривини меніска перепад тисків у рідині й газі зростає і може істотно змінювати параметри контакту.

Вплив капілярних явищ на взаємодію тіл, яким властивий локальний контакт, вивчали С.А. Чижик [11], О.Г. Чекіна [10], Y. Ando [12], Y. Peng [31], J. Zheng, J. Streator [44], P. Lambert, A. Delchambre [27], Y. Rabinovich, M. Esayanur, B. Moudgil [34], L. Wang, S. Regnier [41].

K. Takahisa, W. Souta, M. Hiroshige [39, 40] та S. Kobatake, Y. Kawakubo, S. Suzuki [18] досліджували вплив міжповерхневих рідинних містків на переміщення головки в записувальних пристроях, зокрема в HDI (headslider/disk interface) системах жорстких дисків (HDD – hard disk drive). Праці [14, 30, 42] стосуються моделювання контактної взаємодії шорстких тіл за наявності рідини в околі контакту вершин мікровиступів. Суху або рідинну адгезію досліджували у працях [28, 33, 43, 45].

Важливу роль капілярні явища можуть відігравати і під час роботи мікро- та нановимірювальної техніки. Тому L. Shi, A. Majumdar [36] вивчали механізм теплопередачі за контакту головки мікроскопа теплового сканування (scanning thermal microscope, SThM) з основою за наявності рідинного містка між ними. Подібні дослідження для атомного силового мікроскопа (atomic force microscope, AFM) з урахуванням капілярних явищ виконували L. Zitzler , S. Herminghaus, F. Mugele [46].

У галузі геомеханіки F. Soulie, F. Cherblanc, M. Youssoufi, C. Saix [38] вивчали макромеханічні характеристики полідисперсних гранульованих матеріалів з урахуванням рідинних містків між гранулами.

C. Pailler-Mattei, H. Zahouani зосереджували увагу на адгезійних властивостях шкіри під час контакту зі жорстким індентором за наявності рідинних менісків [29]. У працях A. Rennie, P. Dickrell, W. Sawyer [35] вивчено функціонування контактних лінз з урахуванням капілярних явищ. G. Huber [17] досліджував контакт лапки плазунів з поверхнею за наявності між ними рідинних містків. Схожими дослідженнями для жуків займалися Z. Dai, Y. Mina, S. Gorb [16], а для плазунів – B.N.J. Persson [32].

Всі згадані праці стосуються контактних задач для тіл з неузгодженими поверхнями (згідно з термінологією Джонсона [2]), для яких область безпосереднього налягання поверхонь є малою проти розмірів самих тіл. Це давало підстави моделювати реальні скінченні тіла півбезмежними областями (одна з гіпотез Герца).

Водночас у природі та різноманітних конструкціях широко розповсюджені структури з узгодженими поверхнями, область контакту яких або цілком охоплює ці поверхні, або співмірна з ними. Під час взаємодії тіл узгодженої форми можлива локальна відсутність їх контакту, зумовлена малими локальними нерівностями поверхонь чи силовими чинниками. При цьому формуються міжконтактні зазори малої висоти, розміри і об'єм яких під навантаженням можуть суттєво змінюватися

навіть за пружних деформацій тіл. Саме тому заповнювач таких зазорів стає активним чинником взаємодії тіл з узгодженими поверхнями, а його реакція (у вигляді тиску) на зміну навантаження може бути відчутнішим, ніж за контакту неузгоджених поверхонь.

Розв'язано [5–7, 9, 37] окремі плоскі й осесиметричні контактні задач для тіл з поодинокими плиткими тунельними і круговими в плані виїмками, коли міжповерхневий зазор заповнений газом і/або рідиною. Огляд публікацій з дослідження взаємодії тіл з періодичним рельєфом за відсутності заповнювача просвітів між ними здійснено у праці [13]. Досліджено [3, 15, 19–26] вплив рідинних містків та газу, який перебуває під сталим тиском, або одного типу заповнювача на контакт тіл із текстурованими поверхнями або коли поверхня одного із них хвиляста. Теоретичне підґрунтя для розв'язання цих актуальних для інженерних застосувань проблем формують розроблені в останні три десятиліття математичні методи плоских і просторових контактних задач для тіл узгодженої форми за наявності між ними локальних незаповнених просвітів.

У цьому розділі досліджено контактну взаємодію пружного тіла та жорсткої основи з плиткою тунельною виїмкою з кутовими точками, що в перерізі має еліптичний чи прямокутний профілі і містить газорідинний заповнювач. У цьому разі просвіт не міняє своєї довжини зі зміною навантаження. Вивчено залежність контактних параметрів такої системи від зовнішнього навантаження для різних варіантів розташування рідинних містків у просвіті (посередині просвіту або на його краях), коли тиск газу в зазорі сталий або змінюється з навантаженням.

1.2. Прямокутна виїмка, частково заповнена змочувальною рідиною

Розглянемо безфрикційну взаємодію пружного ізотропного півпростору зі жорсткою нерухомою основою, яка на межі має мілку тунельну виїмку прямокутного поперечного перерізу шириною $2c$ і висотою A ($A/c \ll 1$), під дією прикладеного на нескінченності рівномірно розподіленого навантаження P^{∞} (рис. 1.1). У півпросторі реалізується стан плоскої деформації.

Внаслідок просідання поверхні пружного півпростору вздовж виїмки найменша висота міжповерхневого просвіту досягається на його середині. Зазор частково заповнений рідиною, яка повністю змочує поверхні тіл. У цьому разі під дією поверхневого натягу капілярний місток формуватиметься в середній (найвужчій) частині просвіту вздовж смуги шириною $2a$. На краях просвіту міститься газ під сталим тиском P_1, що не змінюється під навантаженням. Вважаємо, що рідина не виходить із зазору, тобто об'єм нестисливої рідини V_2, що припадає на одиницю довжини зазору у поздовжньому його напрямі, сталий ($V_2 = \text{const}$). Розглядаємо квазістатичне навантаження, за якого у рідині й газі діє лише тиск і не виникають зсувні

зусилля. Тому межа пружного тіла вздовж зазору вільна від дотичних напружень. Під час навантаження змінюватимуться висота просвіту $h(x)$, довжина ділянки з рідиною та тиск рідини P_2.

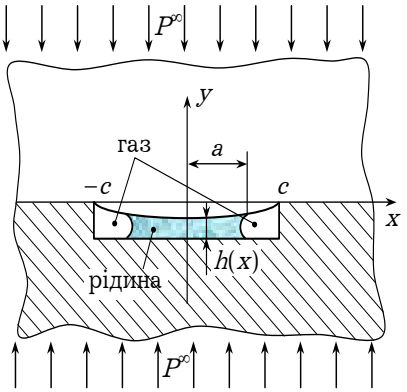


Рис. 1.1

Оскільки зазор між тілами тунельний, рідинний меніск є циліндричною поверхнею, один з радіусів кривини якого $R_2 = \infty$. Через плавну зміну висоти просвіту вважатимемо, що інший радіус кривини меніска $R_1 = h(a)/2$. Тоді формула Лапласа матиме вигляд [1, 3]

$$P_1 - P_2 = 2\sigma / h_0, \tag{1.1}$$

де $h_0 = h(a)$ – висота меніска.

Зважаючи на те, що у пружному півпросторі реалізується стан плоскої деформації, розглядатимемо плоску контактну задачу для верхньої півплощини D_2, утвореної перетином півпростору площиною, перпендикулярною до твірної виїмки. З урахуванням сформульованих положень про умови взаємодії пружного тіла з жорсткою основою, рідиною і газом запишемо контактно-крайові умови на межі $y = 0$ півплощини D_2:

$$\sigma_y = -P_1 + \frac{2\sigma}{h_0}, \quad x \in (-a, a), \qquad \sigma_y = -P_1, \quad x \in (-c, -a) \cup (a, c), \tag{1.2}$$

$$\tau_{xy} = 0, \qquad x \in (-\infty, \infty), \qquad v = 0, \qquad x \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty). \tag{1.3}$$

Умови на нескінченності ($\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$) матимуть вигляд

$$\sigma_y = -P^\infty, \qquad \sigma_x = 0, \qquad \tau_{xy} = 0. \tag{1.4}$$

Основна особливість сформульованої контактної задачі полягає у її нелінійності: півширина ділянки з рідиною a та висота меніска h_0, які

фігурують у крайових умовах (1.1), (1.2) на ділянці просвіту, заздалегідь невідомі і змінюються під час навантаження. Тиск у рідині невідомий, проте згідно з формулою Лапласа визначається через тиск газу та висоту меніска. Тому для замикання задачі необхідні ще дві умови, щоб знайти параметри a і h_0. Для цього використаємо умову рівності висоти менісків і зазору в точках $x = \pm a$

$$h_0 = h(a) \tag{1.5}$$

та умову збереження кількості рідини за навантаження

$$\int_{-a}^{a} h(x)dx = V_2 . \tag{1.6}$$

Оскільки умови (1.2, 1.3), (1.5) записані в термінах висоти просвіту $h(x)$, використаємо для розв'язання сформульованої контактної задачі метод функцій міжконтактних зазорів [4, 7, 23–26]. Згідно з ним напруження і похідні від переміщень у півплощині D_2 подамо у комплексному вигляді через висоту актуального просвіту $h(x)$, що виникає між тілами під час навантаження системи та дії міжповерхневого середовища:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) - P^{\infty},$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\overline{z}) + (z-\overline{z})\overline{\Phi'(z)} - P^{\infty},$$

$$2G(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \Phi(\overline{z}) - (z-\overline{z})\overline{\Phi'(z)} + \frac{3-\kappa}{4}P^{\infty}, \quad z \in D_2, \tag{1.7}$$

де

$$\Phi(z) = (-1)^{j+1}\frac{1}{\pi K}\left\{\int_{-c}^{c}\frac{h'(t)}{t-z}dt\right\},\ z \in D_j,\ j = 1,2, \tag{1.8}$$

D_1 – нижня півплощина.

Подання (1.7) і (1.8) визначають напруження і похідні від переміщень через невідому заздалегідь функцію висоти зазору $h(x)$. Вони задовольняють всі крайові умови (1.3), (1.4) задачі, за винятком умови (1.2). Задовольнивши цю умову, отримаємо [3, 4] сингулярне інтегральне рівняння (СІР) для визначення похідної від висоти просвіту $h'(x)$:

$$\int_{-c}^{c}\frac{h'(t)}{t-x}dt = -\frac{\pi K}{4}(P^{\infty} - P(x)), \qquad x \in (-c,c). \tag{1.9}$$

Тут $K = \dfrac{1+\kappa}{2G}$, $\kappa = 3-4\nu$, $P(x) = \begin{cases} P_1 - 2\sigma/h_0, & |x| < a, \\ P_1, & a < |x| < c. \end{cases}$

У крайніх точках зазору повинні виконуватись умови рівності висоти

просвіту та виїмки ($h(\pm c) = A$), які в еквівалентному вигляді запишемо так:

$$\int_{-c}^{c} h'(t)\,dt = 0, \qquad h(c) = A\,. \tag{1.10}$$

З фізичних міркувань (через наявність кутових точок виїмки) шукатимемо необмежений у точках $x = \pm c$ розв'язок рівняння (1.9) з урахуванням першої з умов (1.10). В результаті отримаємо похідну від висоти просвіту:

$$h'(x) = -\frac{K(P^{\infty} - P_1)x}{2\sqrt{c^2 - x^2}} - \frac{\sigma K}{\pi h_0}\left[\Gamma(c, x, -a) - \Gamma(c, x, a) + \frac{2x}{\sqrt{c^2 - x^2}}\arcsin\frac{a}{c}\right], \tag{1.11}$$

де $\Gamma(b, x, t) = \ln\dfrac{b^2 - tx + \sqrt{\left(b^2 - x^2\right)\left(b^2 - t^2\right)}}{b^2 - tx - \sqrt{\left(b^2 - x^2\right)\left(b^2 - t^2\right)}}$.

Проінтегрувавши функцію (1.11), враховуючи другу умову (1.10), визначимо висоту зазору:

$$h(x) = A - \left[\frac{1}{2}K(P^{\infty} - P_1) - \frac{2K\sigma}{\pi h_0}\arcsin\frac{a}{c}\right]\sqrt{c^2 - x^2} - \frac{K\sigma}{2\pi h_0}\left[(x + a)\Gamma(c, x, -a) - (x - a)\Gamma(c, x, a)\right]. \tag{1.12}$$

Підставляючи функцію $h(x)$ (1.12) в умови (1.5), (1.6), отримаємо два трансцендентні рівняння для визначення висоти меніска h_0 і його координати a (півдовжини ділянки з рідиною):

$$h_0^2 + \left(A + \frac{K}{2}(P^{\infty} - P_1)\sqrt{c^2 - a^2}\right)h_0 - \left(\frac{2K\sigma}{\pi}\sqrt{c^2 - a^2}\arcsin\frac{a}{c} - \frac{4K\sigma a}{\pi}\ln\frac{c}{a}\right) = 0\,; \tag{1.13}$$

$$2aA - \left[\frac{K}{2}(P^{\infty} - P_1) + \frac{2K\sigma}{\pi h_0}\arcsin\frac{a}{c}\right]\left(a\sqrt{c^2 - a^2} + c^2\arcsin\frac{a}{c}\right) = V_2\,. \tag{1.14}$$

Розв'язавши (1.13), як квадратне рівняння відносно h_0, і вибравши з двох його коренів фізично коректний (невід'ємний), одержимо:

$$h_0 = \frac{1}{2}\left(A + \frac{K}{2}(P^\infty - P_1)\sqrt{c^2 - a^2} \right) + \left[\left(A - (P^\infty - P_1)\frac{K}{2}\sqrt{c^2 - a^2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{16K\sigma}{\pi}\sqrt{c^2 - a^2}\arcsin\frac{a}{c} - \frac{16K\sigma a}{\pi}\ln\frac{c}{a} \right]^{1/2}. \qquad (1.15)$$

Виключаючи за допомогою (1.15) величину h_0 із (1.14), отримаємо для a трансцендентне рівняння, яке розв'язуємо числово методом Ньютона. Розрахунки виконали для безрозмірних величин: висоти міжконтактного зазору $\tilde{h} = h/c$; півдовжини ділянки з рідиною $\tilde{a} = a/c$; поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma} = K\sigma/c$; тиску на нескінченності $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$; тиску газу $\tilde{P}_1 = KP_1$; висоти виїмки $\tilde{A} = A/c$; об'єму рідини в капілярі $\tilde{V}_2 = V_2/(2Ac)$; висоти меніска $\tilde{h}_0 = h_0/c$. Числовий аналіз здійснено для виїмки заввишки $\tilde{A} = 0.001$.

Вплив поверхневого натягу рідини і зовнішнього навантаження на півширину ділянки з рідиною a, де в межах зазору виникають менші за модулем нормальні напруження на межі півплощини D_2, ніж на двох інших ділянках з газом, та перепад тисків $\Delta\tilde{P} = \tilde{P}_1 - \tilde{P}_2$ у рідині й газі за фіксованих тиску газу $\tilde{P}_1 = 10^{-3}$ і об'єму рідини $\tilde{V}_2 = 1/10$ проілюстровано на рис. 1.2 і 1.3. Криві на них відповідають трьом значенням натягу $\tilde{\sigma}$: 10^{-8}, $3\cdot10^{-8}$ та $5\cdot10^{-8}$. Довжина ділянки з рідиною a монотонно зростає з навантаженням (рис. 1.2). Збільшення поверхневого натягу рідини також зумовлює збільшення a, проте за зовнішніх тисків $\tilde{P}^\infty \le 0.0014$ цей вплив практично невідчутний і

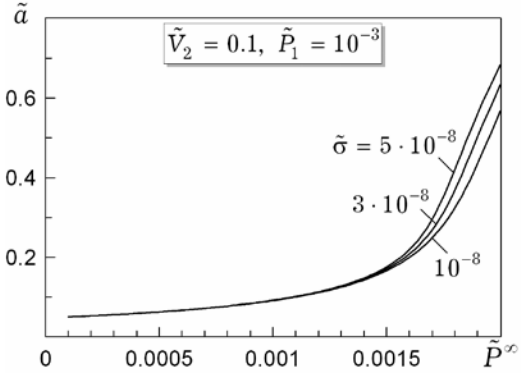


Рис. 1.2

починає проявлятися лише, якщо $\tilde{P}^{\infty} \geq 0.0015$. Водночас перепад тисків $\Delta\tilde{P}$ суттєво реагує на зміну поверхневого натягу (рис. 1.3) і збільшується разом з ним. Для розглянутих натягів перепад $\Delta\tilde{P}$ немонотонно залежить від прикладеного навантаженням (рис. 1.3): спочатку зростає зі збільшенням зовнішнього тиску, а після досягнення ним певного значення – починає спадати. Це пояснюють зростанням радіуса меніска зі наближенням рідини до країв зазору. Що більший натяг рідини, то за меншого навантаження досягається максимум тиску у рідині.

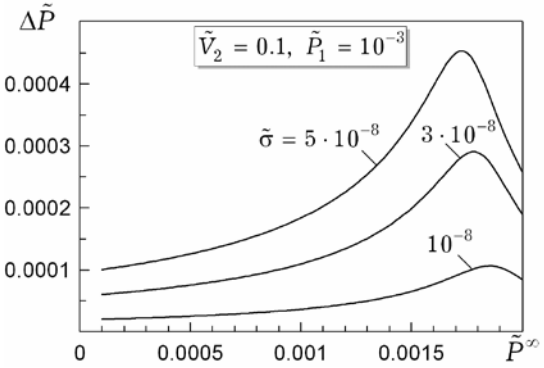


Рис. 1.3

На рис. 1.4 та 1.5 зображено залежності півдовжини ділянки з рідиною $\tilde{a}$ та перепаду тисків $\Delta\tilde{P}$ у рідині та газі від прикладеного до тіл навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ для різних значень об'єму рідини $\tilde{V}_2$: 0.1, 0.066 та 0.05 за фіксованих тиску газу $\tilde{P}_1 = 10^{-3}$ і поверхневого натягу $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$. Зменшення кількості рідини в зазорі призводить до зменшення довжини ділянки з рідиною

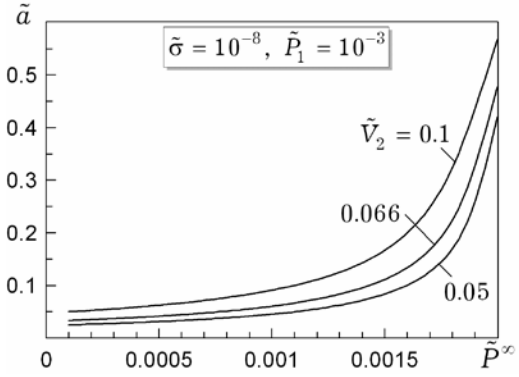


Рис. 1.4

(рис. 1.4) і збільшення перепаду тисків (рис. 1.5) за однакового навантаження на нескінченності. Проте перепад тисків $\Delta\tilde{P}$ для наведених значень об'єму рідини практично не відрізняється, доки зовнішнє навантаження не досягне значення $\tilde{P}^{\infty} = 0.0016$ (рис 1.5). Для розглянутих об'ємів рідини та діапазону навантажень чітко проявляється зміна характеру монотонності залежності $\Delta\tilde{P}$ від $\tilde{P}^{\infty}$ у межах діапазону навантажень $\tilde{P}^{\infty} \in [0.0018, 0.0019]$. Що менший об'єм рідини, то менше навантаження, за якого досягається максимальний перепад тисків.

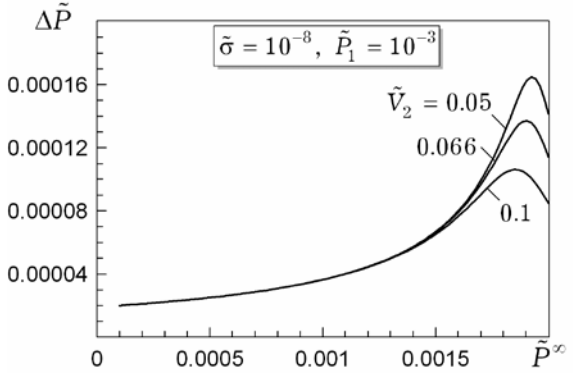


Рис. 1.5

На рис. 1.6 проілюстровано розподіл нормальних напружень $\tilde{\sigma}_y(\tilde{x}, 0)$ (*1* – за наявності рідинних містків, *2* – за їх відсутності, зазор заповнений лише газом). На ділянці з рідиною абсолютне значення нормальних напружень менше за тиск газу. В точці розмежування рідини і газу є стрибок напружень, а далі до кінців зазору абсолютне значення нормального напруження рівне тиску

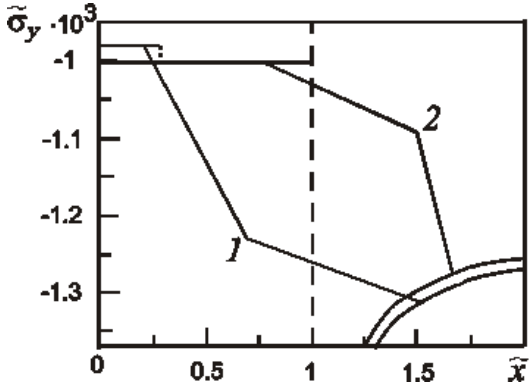
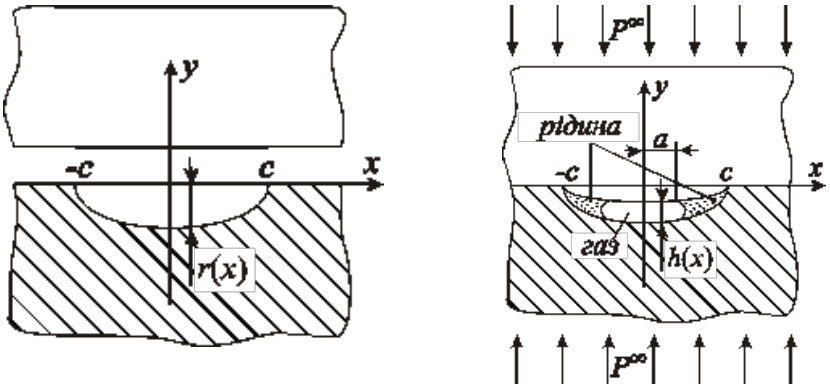


Рис. 1.6

газу. Ззовні зазору, де відбувається безпосередній контакт поверхонь тіл, нормальні контактні напруження мають кореневу особливість на краю виїмки. З віддаленням від неї вони збільшуються, асимптотично прямуючи до значення напружень на нескінченності. Коли в зазорі є рідинні містки, абсолютне значення нормальних контактних напружень поза зазором більше, ніж коли він заповнений лише газом, що перебуває під сталим тиском.

1.3. Виїмка еліптичного профілю, що містить змочувальну рідину та ідеальний газ

Дослідимо взаємодію пружного півпростору з жорсткою основою, що вздовж нескінченної смуги шириною $2c$ має плитку виїмку, поперечний переріз якої описує парна функція $r(x)$, що монотонно зростає, якщо $x > 0$ (рис. 1.7*а*). Плиткість виїмки означає, що $r(x)/c \ll 1$, $x \in [-c; c]$. Зовні виїмки поверхня жорсткого тіла плоска. В крайніх її точках ($x = \pm c$) межа має кутову точку.



а *б*

Рис. 1.7

Під дією прикладеного на нескінченності рівномірно розподіленого навантаження P^{∞} півпростір починає контактувати з основою, перебуваючи в умовах плоскої деформації. Вважаємо основу нерухомою, а взаємодію тіл — безфрикційною. Тому на межі пружного півпростору на ділянках контакту дотичні напруження і нормальні переміщення дорівнюють нулю.

Внаслідок нерівності основи прямий контакт тіл відсутній уздовж виїмки, де між поверхнями формується просвіт (рис. 1.7*б*). Вважаємо, що він частково заповнений нестисливою рідиною, яка повністю змочує поверхні тіл. У цьому разі рідина під дією поверхневого натягу формує капілярні містки на краях зазору однакових ширини $l = c - a$ і об'єму V_2 (рис. 1.7*б*).

На середній частині зазору вздовж смуги шириною $2a$ міститься ідеальний газ, стан якого описує рівняння Клапейрона-Менделєєва

$$P_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu_1} RT\,, \tag{1.16}$$

де P_1 – тиск газу; m_1 – маса газу, що припадає на одиницю довжини зазору в напрямку, перпендикулярному до площини рисунка; V_1 – об'єм газу, що припадає на одиницю довжини зазору в напрямку, перпендикулярному до площини рисунка; μ_1 – молярна маса газу; R – універсальна газова стала; T – температура газу.

Вважаємо, що зазор герметичний, тобто рідина і газ не можуть з нього виходити. Розглядаємо квазістатичне навантаження, за якого у рідині та газі діє лише тиск і не виникають зсувні зусилля. Тому межа пружного тіла вздовж зазору вільна від дотичних напружень.

Під час навантаження змінюються висота просвіту $h(x)$, довжина ділянки з газом $2a$ і рідинних ділянок l. Зі зміною зазору змінюються також тиск газу P_1 й рідини P_2.

Тут формула Лапласа така:

$$P_2 - P_1 = 2\sigma / h_0\,.$$

Контактно-крайові умови на межі $y = 0$ півплощини D_2 мають вигляд

- на ділянці зазору

$$\tau_{xy} = 0\,, \quad x \in (-c, c)\,, \qquad \sigma_y = -P_1\,, \quad x \in (-a, a)\,, \tag{1.17}$$

$$\sigma_y = -P_1 + \frac{2\sigma}{h_0}\,, \quad x \in (-c, -a) \cup (a, c)\,; \tag{1.18}$$

- на ділянках контакту зі жорсткою основою

$$\tau_{xy} = 0\,, \quad v = 0\,, \quad x \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty)\,, \tag{1.19}$$

Умови на нескінченності ($\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$) матимуть вигляд (1.4).

У розглянутому випадку тиск газу P_1, півширина ділянки з газом a та висота h_0 меніска, які входять у крайові умови (1.18) на ділянці просвіту, заздалегідь невідомі та змінюються з навантаженням. Для визначення цих параметрів використаємо рівняння

$$h_0 = h(a)\,, \qquad P_1 \int_{-a}^{a} h(x)dx = \frac{m_1}{\mu_1} RT\,, \qquad \int_{a}^{c} h(x)dx = V_2\,, \tag{1.20}$$

що замикають контактно-крайові умови. Рівняння (1.20) записані в термінах функції висоти міжконтактного зазору: умова для визначення висоти меніска,

рівняння Клапейрона-Менделєєва для газу та умова збереження об'єму нестисливої рідини.

Напруження і похідні від переміщень у верхній півплощині описують формули (1.7), в яких комплексний потенціал $\Phi(z)$ визначено через висоту виїмки і зазору:

$$\Phi\ (z) = (-1)^{j+1}\frac{1}{\pi K}\left\{\int_{-c}^{c}\frac{h'(t)}{t-z}dt - \int_{-c}^{c}\frac{r'(t)}{t-z}dt\right\},\ z\in D_j,\ j=1,2. \qquad (1.21)$$

Для знаходження похідної від висоти просвіту $h'(x)$ отримали сингулярне інтегральне рівняння

$$\int_{-c}^{c}\frac{h'(t)}{t-x}dt = -\frac{\pi K}{4}\left(P^{\infty} - P(x)\right) + \int_{-c}^{c}\frac{r'(t)}{t-x}dt,\ x\in(-c,c). \qquad (1.22)$$

Тут $P(x) = \begin{cases} P_1, & |x| < a, \\ P_1 - \dfrac{2\sigma}{h_0}, & a < |x| < c. \end{cases}$

Функція $h(x)$ повинна задовольняти умови рівності нулю висоти просвіту у крайніх його точках $h(c) = h(-c) = 0$, які запишемо у вигляді двох еквівалентних умов:

$$\int_{-c}^{c} h'(t)dt = 0, \qquad h(-c) = 0. \qquad (1.23)$$

Подальше розв'язання задачі пов'язане з конкретизацією функції $r(x)$, яка задає форму виїмки та входить у праву частину СІР (1.22). Розглянемо еліптичну виїмку, форму якої описує функція $r(x) = A\sqrt{1 - x^2/c^2}$, де $A = r(0)$ — максимальна висота виїмки ($A \ll c$). Тоді $\int_{-c}^{c}\frac{r'(t)}{t-x}dt = \frac{A}{c}\pi$ та рівняння (1.22) набуває вигляду

$$\int_{-c}^{c}\frac{h'(t)}{t-x}dt = -\frac{\pi K}{4}\left[P^{\infty} - P(x)\right] + \frac{A}{c}\pi. \qquad (1.24)$$

Визначаючи необмежений у точках $x = \pm c$ розв'язок рівняння (1.24) з урахуванням першої умови (1.23) [8], отримаємо похідну від висоти просвіту:

$$h'(x) = -\frac{K\left(P^{\infty} - P_1\right)x}{2\sqrt{c^2 - x^2}} - \frac{\sigma K}{\pi h_0}\left[\Gamma(c,x,-a) - \Gamma(c,x,a)\right] +$$

$$+\frac{\sigma K x}{\pi h_0\sqrt{c^2-x^2}}\left(2\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)-\pi\right)-\frac{A}{c}\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}. \qquad (1.25)$$

Інтегруючи функцію (1.25) та враховуючи другу умову (1.23), визначимо висоту зазору $h(x)$:

$$h(x)=\left\{\frac{K}{2}\left(P^{\infty}-P_1\right)-\frac{K\sigma}{\pi h_0}\left[2\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)-\pi\right]-\frac{A}{c}\right\}\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}-$$

$$-\frac{K\sigma}{2\pi h_0}\left[\left(x+a\right)\Gamma(c,x,-a)-\left(x-a\right)\Gamma(c,x,a)\right]. \qquad (1.26)$$

Підставляючи співвідношення (1.26) у формули (1.20), для визначення координати меніска a, його висоти h_0 та тиску газу P_1 отримаємо три трансцендентні рівняння

$$h_0^2+\frac{K}{2}\left(P^{\infty}-P_1\right)\sqrt{c^2-a^2}\,h_0-$$

$$-\frac{K\sigma}{\pi}\left[2\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)-\pi\right]\sqrt{c^2-a^2}-A\sqrt{c^2-a^2}-\frac{2K\sigma a}{\pi}\ln\left(\frac{c}{a}\right)=0;$$

$$P_1\left\{\frac{A}{c}-\frac{K}{2}\left(P^{\infty}-P_1\right)+\frac{K\sigma}{\pi h_0}\left[2\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)-\pi\right]\right\}\times$$

$$\times\left[a\sqrt{c^2-a^2}-c^2\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\right]=\frac{m_1}{\mu_1}RT; \qquad (1.27)$$

$$\left\{\frac{A}{c}-\frac{K}{2}\left(P^{\infty}-P_1\right)+\frac{K\sigma}{\pi h_0}\left[2\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)-\pi\right]\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{c^2\pi}{4}-\frac{a}{2}\sqrt{c^2-a^2}-\frac{c^2}{2}\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\right]+\frac{2K\sigma a^2}{\pi h_0}\ln\left(\frac{c}{a}\right)=V_2.$$

Розрахунки виконано для безрозмірних величин: висоти міжконтактного зазору $\tilde{h}=h/c$; довжини ділянки дії газу $\tilde{a}=a/c$; поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}=K\sigma/c$; тиску на нескінченності $\tilde{P}^{\infty}=KP^{\infty}$; тиску газу в міжконтактному зазорі $\tilde{P}_1=KP_1$; максимальної висоти виїмки $\tilde{A}=A/c$; маси газу $\tilde{m}_1=\dfrac{m_1RTK}{c^2\mu_1}$; довжини ділянки з рідиною $\tilde{l}=l/c$; висоти меніска $\tilde{h}_0=h_0/c$; об'єму рідини $\tilde{V}_2=V_2/V$, де V — об'єм виїмки.

Для розв'язування системи рівнянь (1.27) розробили числовий

ітераційний алгоритм, який полягає ось у чому:

- Задаємо масу газу і об'єм рідини $\tilde{m}_1$ та $\tilde{V}_2$.
- З першого рівняння, розв'язавши його як квадратне рівняння відносно $\tilde{h}_0$, аналітично визначаємо $\tilde{h}_0$ через $\tilde{a}$ і $\tilde{P}_1$

$$h_0 = \frac{1}{2}\left(\pi\left(\tilde{P}^{\infty} - \tilde{P}_1 \right) + A\sqrt{1-\tilde{a}^2} \right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\tilde{a}^2\right)\left(A-\pi\left(\tilde{P}^{\infty}-\tilde{P}_1\right)\right)^2 + 8\tilde{\sigma}\left[\sqrt{1-\tilde{a}^2}\arcsin\tilde{a} + 2\tilde{a}\ln\tilde{a}\right]} \quad (1.28)$$

та підставляємо (1.28) у два останні рівняння (1.27).

- Задаємо діапазон зміни зовнішнього навантаження $[\tilde{P}_0^{\infty}, \tilde{P}_N^{\infty}]$ і вибираємо по черзі $(N+1)$ дискретне значення навантаження $\tilde{P}_{(n)}^{\infty} = \tilde{P}_{(0)}^{\infty} + n(\tilde{P}_N^{\infty} - \tilde{P}_0^{\infty}) / N$, $n = \overline{0, N}$.
- Для кожного n задаємо J дискретних значень довжини ділянки з газом $\tilde{a}_{(n)}^{j} = 1 - j/(J+1)$ ($j = \overline{1, J}$) з можливого діапазону її зміни $0 < \tilde{a} < 1$ та J дискретних значень тиску газу $\tilde{P}_{1,(n)}^{i} = i\tilde{P}_{(n)}^{\infty} / (J+1)$ ($i = \overline{1, J}$) з вибраного діапазону його зміни $0 < \tilde{P}_1 < \tilde{P}_{(n)}^{\infty}$.
- Підставляємо значення $\tilde{P}_{(n)}^{\infty}$, $\tilde{a}_{(n)}^{j}$ ($j = \overline{1, J}$), $\tilde{P}_{1,(n)}^{i}$ ($i = \overline{1, J}$) в ліву частину другого і третього рівняння (1.27) і визначаємо масиви $\left\{\tilde{m}_{1,(n)}^{i,j}, \tilde{V}_{2,(n)}^{i,j}\right\}$ ($j = \overline{1, J}$, $i = \overline{1, J}$).
- Для кожної пари $\left\{\tilde{m}_{1,(n)}^{i,j}, \tilde{V}_{2,(n)}^{i,j}\right\}$ перевіряємо умову $E < \varepsilon$, де $E = \sqrt{\left(\frac{\tilde{m}_{1,(n)}^{i,j} - \tilde{m}_1}{\tilde{m}_1}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{V}_{2,(n)}^{i,j} - \tilde{V}_2}{\tilde{V}_2}\right)^2}$, ε – задана похибка. З усіх пар, що задовольняють цю умову, вибираємо пару з тими номерами k, l, для яких E мінімальне, та зберігаємо відповідні $\tilde{a}_{(n)}$ ($\tilde{a}_{(n)} = \tilde{a}_{(n)}^{l}$), $\tilde{P}_{1,(n)}$ ($\tilde{P}_{1,(n)} = \tilde{P}_{1,(n)}^{k}$).

Числовий аналіз здійснено для виїмки з максимальною висотою $\tilde{A} = 0.001$; похибку вибирали $\varepsilon = 0.0001$.

Проілюстровано залежності тиску газу $\tilde{P}_1$ (рис. 1.8, суцільні лінії) та

рідини $\tilde{P}_2$ (рис. 1.8, штрихові лінії) і висоти меніска $\tilde{h}_0$ (рис. 1.9) від прикладеного до тіл навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ для різних значень об'єму рідини (крива 1 – $\tilde{V}_2 = 1/10$; крива 2 – $1/15$; крива 3 – $1/20$) і фіксованих інших вхідних параметрів ($\tilde{m}_1 = 4 \cdot 10^{-7}$; $\tilde{\sigma} = 3 \cdot 10^{-8}$). Зі збільшенням навантаження

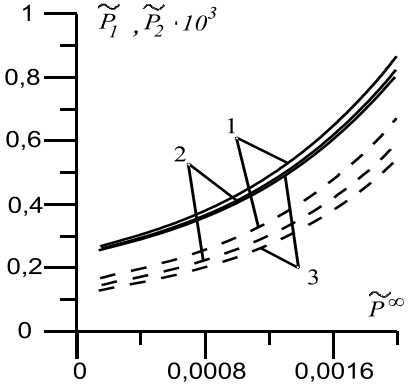


Рис. 1.8

довжина рідинної ділянки $\tilde{l}$ і тиски газу $\tilde{P}_1$ та рідини $\tilde{P}_2$ зростають, а висота меніска спадає. Тиски у рідині та газі синхронно зростають зі збільшенням об'єму рідини, проте тиск рідини більше реагує на зміну її об'єму, між тиск газу.

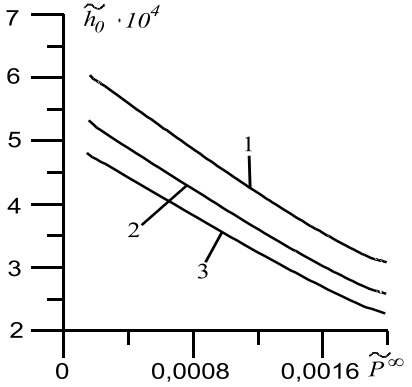


Рис. 1.9

Вплив поверхневого натягу рідини та зовнішнього навантаження на геометричні параметри заповненої рідиною частини зазору та тиск заповнювача проілюстровано на рис. 1.10–1.12. Обчислення виконали для трьох різних значень натягу рідини (крива 1 – $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$; крива 2 – $3 \cdot 10^{-8}$;

крива 3 – $5\cdot10^{-8}$) та фіксованих маси газу $\tilde{m}_1 = 4\cdot10^{-7}$ й об'єму рідини $\tilde{V}_2 = 1/10$. На рис. 1.10 зображено залежності довжини рідинних ділянок $\tilde{l}$, на рис. 1.11 – тиску газу $\tilde{P}_1$ (суцільні лінії) та рідини $\tilde{P}_2$ (штрихові лінії) і на рис. 1.12 – висоти меніска $\tilde{h}_0$ від прикладеного до тіл навантаження $\tilde{P}^\infty$.

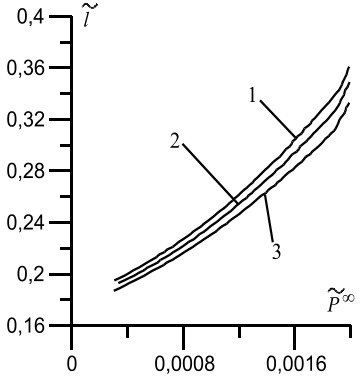


Рис. 1.10

Збільшення поверхневого натягу рідини зумовлює зменшення довжини рідинної ділянки та висоти меніска (рис. 1.10 та рис. 1.12). Тиски ж складників заповнювача (рис. 1.11) зі збільшенням натягу рідини змінюються асинхронно: тиск газу збільшується, а тиск рідини зменшується. Наслідком збільшення зовнішнього навантаження є зростання рідинної ділянки і тиску заповнювача

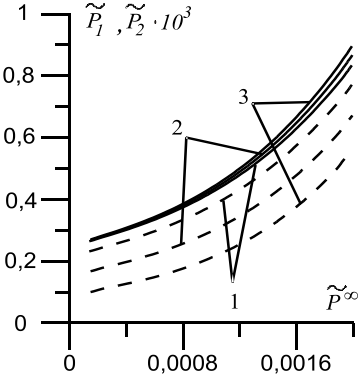


Рис. 1.11

та зменшення висоти меніска для всіх розглянутих значень поверхневого натягу рідини. Найчутливішим до зміни поверхневого
натягу є тиск газу.

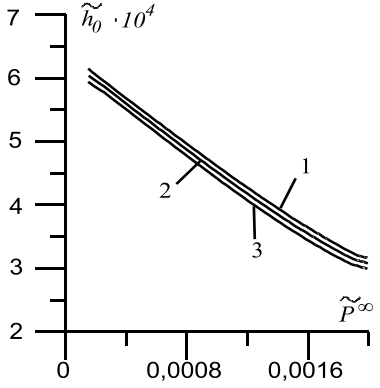


Рис. 1.12

1.4. Виїмка, частково заповнена рідиною, що не змочує поверхні тіл

Розглянемо безфрикційну взаємодію пружного тіла зі жорстокою основою, що має виїмку шириною $2c$, поперечний переріз якої описує функція $r(x) = A\sqrt{1 - x^2 / c^2}$ ($A << c$), коли зазор між ними частково заповнений рідиною, що не змочує поверхні тіл. Під дією поверхневого натягу вона збиратиметься в середній частині зазору (рис. 1.13). Інша частина зазору містить газ, що перебуває під сталим тиском P_1.

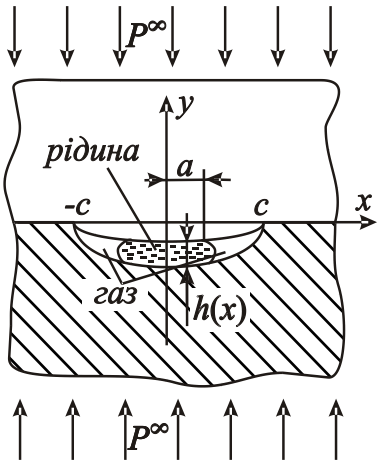


Рис. 1.13

Кількість рідини за стиску тіл залишається незмінною, тобто об'єм нестисливої рідини V_2, що припадає на одиницю довжини зазору у

поздовжньому його напрямі, сталий ($V_2 = \text{const}$). Під час навантаження змінюватимуться висота просвіту $h(x)$ і його об'єм, довжина ділянки з рідиною та її тиск.

На відміну від попередніх підрозділів, де розглядали незмочувальну рідину, тут зосередимо увагу на змочувальній. В цьому разі тиск рідини P_2 більший за тиск газу P_1 і формула Лапласа має вигляд:

$$P_2 - P_1 = 2\sigma / h_0 .$$

Контактно-крайові умови на межі $y = 0$ півплощини такі:

- на ділянці зазору

$$\tau_{xy} = 0, \quad x \in (-c, c), \qquad \sigma_y = -P_1 - \frac{2\sigma}{h_0} \quad x \in (-a, a),$$

$$\sigma_y = -P_1, \quad x \in (-c, -a) \cup (a, c); \tag{1.29}$$

- на ділянках контакту з жорсткою основою

$$\tau_{xy} = 0, \quad v = 0, \quad x \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty). \tag{1.30}$$

Умови на нескінченності ($\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$)

$$\sigma_y = -P^{\infty}, \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \tag{1.31}$$

Для визначення півширини ділянки з рідиною a та висоти меніска h_0 використаємо рівняння

$$h_0 = h(a), \qquad \int_{-a}^{a} h(x)dx = V_2. \tag{1.32}$$

СІР задачі має вигляд

$$\int_{-c}^{c} \frac{h'(t)}{t - x} dt = -\frac{\pi K}{4}\left[P^{\infty} - P(x)\right] + \frac{A}{c}\pi, \; x \in (-c, c). \tag{1.33}$$

де $P(x) = \begin{cases} P_1 + \dfrac{2\sigma}{h_0}, & |x| < a, \\ P_1, & a < |x| < c. \end{cases}$

Функція $h(x)$ задовольняє умови

$$\int_{-c}^{c} h'(t)dt = 0, \qquad h(-c) = 0. \tag{1.34}$$

Розв'язавши рівняння (1.33) з урахуванням першої умови (1.34), знайдемо похідну від висоти просвіту:

$$h'(x) = -\frac{K\left(P^{\infty} - P_1\right)x}{2\sqrt{c^2 - x^2}} - \frac{\sigma K}{\pi h_0}\left[\Gamma(c, x, -a) - \Gamma(c, x, a)\right] +$$

$$+ \frac{4\sigma K x}{\pi h_0 \sqrt{c^2 - x^2}} \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) - \frac{A}{c}\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}. \qquad (1.35)$$

Інтегруючи функцію (1.35) та враховуючи другу умову (1.34), визначимо висоту зазору:

$$h(x) = \left\{\frac{K}{2}\left(P^{\infty} - P_1\right) - \frac{4K\sigma}{\pi h_0}\arcsin\left(\frac{a}{c}\right) - \frac{A}{c}\right\}\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} -$$

$$- \frac{K\sigma}{2\pi h_0}\left[\left(x + a\right)\Gamma(c, x, -a) - \left(x - a\right)\Gamma(c, x, a)\right]. \qquad (1.36)$$

Підставляючи функцію (1.36) у співвідношення (1.32), для визначення координати меніска a та його висоти h_0 отримаємо два трансцендентні рівняння

$$h_0^2 + \frac{K}{2}\left(P^{\infty} - P_1\right)\sqrt{c^2 - a^2}\,h_0 -$$

$$- \frac{4K\sigma}{\pi}\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\sqrt{c^2 - a^2} - A\sqrt{c^2 - a^2} - \frac{2K\sigma a}{\pi}\ln\left(\frac{c}{c}\right) = 0,$$

$$\left\{\frac{A}{c} - \frac{K}{2}\left(P^{\infty} - P_1\right) + \frac{4K\sigma}{\pi h_0}\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\right\}$$

$$\times\left[a\sqrt{c^2 - a^2} - c^2\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\right] = V_2. \qquad (1.37)$$

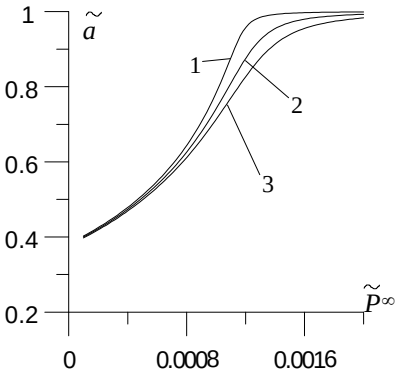


Рис. 1.14

Для розв'язування системи рівнянь (1.37) використали числовий алгоритм, описаний у підрозділі 1.3. Числовий аналіз здійснено для виїмки, максимальна висота якої $\tilde{A} = 0.001$, за сталого тиску газу $\tilde{P}^{\infty} = 0.0001$.

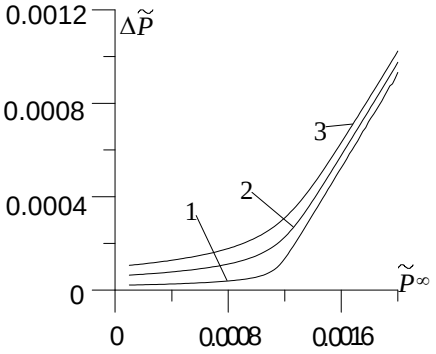


Рис. 1.15

На рис. 1.14 зображено залежність півширини ділянки з рідиною $\tilde{a}$ від зовнішнього навантаження для об'єму рідини, що дорівнює половині об'єму виїмки ($\tilde{V}_2 = 1/2$), та різних поверхневих натягів рідини (крива 1 – $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$; крива 2 – $3\cdot10^{-8}$; крива 3 – $5\cdot10^{-8}$). Як бачимо, зі збільшенням зовнішнього тиску довжина ділянки з рідиною зростає, але за її наближення до краю виїмки

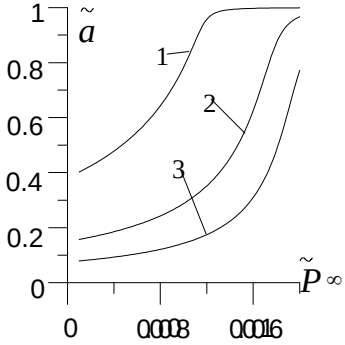


Рис. 1.16

це зростання значно сповільнюється. Це зумовлено тим, що з наближенням рідини до краю зазору зменшується висота (радіус) меніска, а отже (згідно з формулою Лапласа) збільшується тиск у рідині і її опір закриттю зазору. Тому для подальшого закриття зазору потрібно прикладати більше навантаження. Зі підвищенням поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}$ збільшується перепад тиску у рідині й газі $\Delta\tilde{P}$ (рис. 1.15), що означає зростання тиску рідини, оскільки тиск

газу сталий.

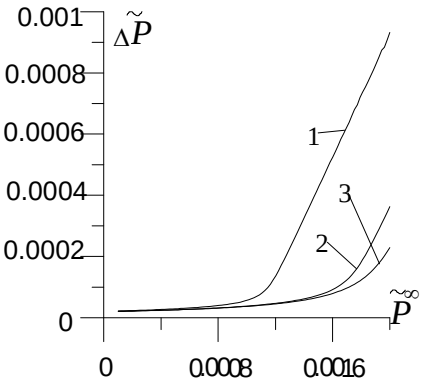


Рис. 1.17

Вплив об'єму рідини в зазорі на залежність довжини ділянки з рідиною та перепад тисків у рідині й газі від навантаження ілюструють рис. 1.16 і 1.17, відповідно (крива 1 – $\tilde{V}_2 = 1/2$; крива 2 – $1/5$; крива 3 – $1/10$) за поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$. Як бачимо, збільшення об'єму рідини в зазорі призводить до зростання довжини ділянки з рідиною і збільшення перепаду тисків у рідині й газі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Арцыбышев С.А.* Курс физики. Ч. 1. Механика и теплота. – М.: Гос. уч.-пед. изд-во мин. просвещения РСФСР, 1951. – 672 с.
2. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
3. *Козачок О.П., Мартиняк Р.М., Слободян Б.С.* Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. – Львів: Растр-7, 2018. – 200 с.
4. *Козачок О.П., Мартиняк Р.М.* Локальне зношування пружних півпросторів із виступами // Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь / За заг. ред. Р.М. Мартиняка. – Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022. – 392 с. – С. 281–302.
5. *Мартиняк Р.М.* Контактна взаємодія двох півпросторів при наявності поверхневої виїмки, частково заповненої нестисливою рідиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1990. – **26**, № 2. – С. 91–94.
6. *Мартиняк Р.М., Слободян Б.С.* Взаємодія двох тіл за наявності капілярів у

міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 1. – С. 164–173.

7. *Мартиняк Р.М.* Метод функцій міжконтактних зазорів у задачах локального порушення контакту пружних півпросторів // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 102–108.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 600 с.
9. *Слободян Б.С., Мартиняк Р.М.* Моделювання взаємодії тіл з урахуванням поверхневого натягу рідини в міжконтактному просвіті // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2007. – Вип. 6. – С. 19–29.
10. *Чекина О.Г.* О трении шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // Трение и износ. – 1998. – **19**, № 3. – С. 306–311.
11. *Чижик С.А.* Капиллярный механизм адгезии и трения шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // Трение и износ. – 1994. – **15**, № 1. – С. 11–26.
12. *Ando Y.* Effect of capillary formation on friction and pull-off forces measured on submicron-size asperities // Tribology Letters. – 2005. – **19**, No. 1. – P. 29–36.
13. *Block J.M., Keer L.M.* Periodic contact problems in plane elasticity // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – **3**, No. 7. – P. 1207–1237.
14. *Butler M.D., Vella D.* Liquid bridge splitting enhances normal capillary adhesion and resistance to shear on rough surfaces // J. Colloid and Interface Sci. – 2022. – **607**. – P. 514–529.
15. *Dai M., Hua J., Schiavone P.* Compressible liquid/gas inclusion with high initial pressure in plane deformation: Modified boundary conditions and related analytical solutions // European J. of Mech. / A Solids. – 2020. – **82**. – 104000.
16. *Dai Z., Min Y., Gorb S.* Frictional characteristics of the beetle head-joint material // Wear. – 2006. – **260**. – P. 168–174.
17. *Huber G.* Nanoscale adhesion of individual gecko spatulae explored by atomic force microscopy // Dissertation an der Universitдt Stuttgart. – 2006. – P. 141.
18. *Kobatake S., Kawakubo Y., Suzuki S.* Laplace pressure measurement on laser textured thin-film disk // Tribology Int. – 2003. – **36**. – P. 329–333.
19. *Kozachok O.P.* Contact of an Elastic Body with a Rigid Base Containing Grooves Partially Filled with Nonwetting Liquid // Mater. Sci. – 2020. – **55**, No. 5. – P. 765–773.
20. *Kozachok O.P.* Influence of compressible intercontact liquid on the interaction of an elastic body with a rigid base textured by rectangular grooves // Mater. Sci. – 2018. – **54**, No. 3. – P. 354–360.
21. *Kozachok O.P.* Influence of partial filling of the gaps with compressible liquid on the contact of elastic bodies with wavy surfaces // Mater. Sci. – 2020. – **56**, No. 3. – P. 310–318.

22. *Kozachok O.P.* The influence of liquid bridges on body contact with a hydrophobic periodically textured rigid base // Mater. Sci. – 2024. – **59**, No. 5. – P. 601–607.
23. *Kozachok O.P., Martynyak R.M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2019. – **24**, No. 11. – P. 3381–3391.
24. *Kozachok O.P., Slobodian B.S., Martynyak R.M.* Contact between an elastic body and a rigid base with periodic array of quasielliptic grooves partially filled with liquid wetting the surfaces of the bodies // J. Math. Sci. – 2019. – **240**, No. 2. – P. 162–172.
25. *Kozachok O.P., Slobodian B.S., Martynyak R.M.* Contact of two elastic bodies with wavy topography in the presence of gases in gaps // Mater. Sci. – 2018. – **54**, No. 2. – P. 194–201.
26. *Kozachok O.P., Slobodyan B.S., Martynyak R.M.* Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // Mater. Sci. – 2016. – **51**, No. 6. – P. 804–811.
27. *Lambert P., Delchambre A.* Parameters ruling capillary force at the submillimetric scale // Langmuir. – 2005. – **21**, No. 21. – P. 9537–9543.
28. *Moghadam A., Tafreshi H.V.* On liquid bridge adhesion to fibrous surfaces under normal and shear forces // Colloids and Surfaces A. – 2020. – **589**. – 124473.
29. *Pailler-Mattei C., Zahouani H.* Analysis of adhesive behaviour of human skin in vivo by an indentation test // Tribol. Int. – 2006. – **39**, No. 1. – P. 12–21.
30. *Peng W., Bhushan B.* Sliding contact analysis of layered elastic/plastic solids with rough surfaces // Trans. ASME. J. Tribol. – 2002. – **124**. – P. 46–61.
31. *Peng Y.F., Li G.X.* An elastic adhesion model for contacting cylinder and perfectly wetted plane in the presence of meniscus // Trans. ASME. J. Tribol. – 2007. – **129**. – P. 231–234.
32. *Persson B.N.J.* Capillary adhesion between elastic solids with randomly rough surfaces // J. Phys.: Condens. Matter. – 2008. – **20**. – 315007.
33. *Qian J., Lin J., Shi M.* Combined dry and wet adhesion between a particle and an elastic substrate // J. Colloid and Interface Sci. – 2016. – **483**. – P. 321–333.
34. *Rabinovich Y., Esayanur M., Moudgil B.* Capillary forces between two spheres with a fixed volume liquid bridge: theory and experiment // Langmuir. – 2005. – **21**. – P. 10992–10997.
35. *Rennie A., Dickrell P., Sawyer W.* Friction coefficient of soft contact lenses: measurements and modeling // Tribol. Lett. – 2005. – **18**, No. 4. – P. 499–504.
36. *Shi L., Majumdar A.* Thermal transport mechanisms at nanoscale point contacts // Trans. ASME. J. Heat Transf. – 2002. – **124**. – P. 329–337.
37. *Shvets R.M., Martynyak R.M., Kryshtafovych A.A.* Discontinuous contact of an anisotropic half–plane and a rigid base with disturbed surface // Int. J. Eng. Sci. – 1996. – **34**, No. 2. – P. 183–200.

38. *Soulie F., Cherblanc F., Youssoufi M., Saix C.* Influence of liquid bridges on the mechanical behaviour of polydisperse granular materials // Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. – 2006. – **30**. – P. 123–228.
39. *Takahisa K., Souta W., Hiroshige M.* Dynamic characteristics of an in–contact headslider considering meniscus force: Part 1 – Formulation and application to the disk with sinusoidal undulation // Trans. ASME. J. Tribol. – 2000. – **122**. – P. 633–638.
40. *Takahisa K., Souta W., Hiroshige M.* Dynamic characteristics of an in–contact headslider considering meniscus force: Part 2 – Application to the disk with random undulation and design conditions // Trans. ASME. J. Tribol. – 2001. – **123**. – P. 168–174.
41. *Wang L., Regnier S.* A more general capillary adhesion model including shape index: single-asperity and multi-asperity cases // Tribol. Transactions – 2015. – **58**. – P. 106–112.
42. *Wang Y., Hensel R.* Bioinspired underwater adhesion to rough substrates by cavity collapse of cupped microstructures // Advanced Materials Interfaces. – 2021. –**31**, No. 31. – 2101787. – https://doi.org/10.1002/adfm.202101787.
43. *Wang Y, Hensel R, Arzt E.* Attachment of bioinspired microfibrils in fluids: transition from a hydrodynamic to hydrostatic mechanism. // J. R. Soc. Interface – 2022. – **19**, No. 189: 20220050. – https://doi.org/10.1098/rsif.2022.0050.
44. *Zheng J., Streator J.L.* A liquid bridge between two elastic half–spaces: A theoretical study of interface instability // Tribol. Lett. – 2004. – **16**, No. 1–2. – P. 1–9.
45. *Zhu X. , Wang H., Ma L., Huang G., Chen J., Xu W., Liu T.* A reinvestigation on combined dry and wet adhesive contact considering surface tension // Int. J. Mech. Sci. – https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2024.109770.
46. *Zitzler L., Herminghaus S., Mugele F.* Capillary forces in tapping mode atomic force microscopy // Phys. Rev. B. – 2002. – **66**. – P. 155436–1–155436–8.